

TD₇ – Espaces probabilisés

Exercices à préparer

Exercice 1 ★★

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien. Pour un certain type de machines, le technicien constate :

- qu'il doit intervenir la première semaine,
- que s'il est intervenu la n -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$ -ième semaine est égale à $\frac{3}{4}$.
- que s'il n'est pas intervenu la n -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$ -ième semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n -ième semaine » et par p_n la probabilité de E_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n)$, $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n^c)$, puis, en fonction de p_n , déterminer $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n)$ et $\mathbb{P}(E_{n+1} \cap E_n^c)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$
3. En déduire une expression de p_n en fonction de n . Quelle est la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 ★★

Une maladie M affecte un français sur 1000. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 0.99 lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit réellement malade ?
2. Que pensez-vous de ce test ?